

101-13-111

MEMORIA

DEL

PROFESSORE LUCA MARESCA

IN CUI

IL METODO ANALITICO DEGLI ANTICHI

SI APPLICA ALLA RISOLUZIONE

DI VARI DIFFICILI PROBLEMI, E DI QUELLI SPECIALMENTE CHE DICONSI

DELLE

TAZIONI.



07



NAPOLI,

DALLA STAMPERIA REALE.

1825.

CHIUNQUE sia versato nelle scienze matematiche, e gusti per poco l'analisi degli Antichi, non potrà non esser grato al signor D. Giuseppe Scorza, il quale nella sua opera già pubblicata seppe divinare quel metodo sì energico, e preclaro, usato dalle Greche scuole nella risoluzione de' problemi. Certamente gli eruditi e savii Matematici ammireranno di buon grado, come da quelle oscure indicazioni, che rinvengonsi in Pappo Alessandrino, o in qualche altro scrittore involatosi alla voracità del tempo, abbia egli rilevato cotesto metodo, la di cui attività, e generalità somma sorprendono del pari coloro, che ne voglion equamente giudicare. Or quella stima, che ho sempre avuto per questo nostro Geometra non meno, che la conoscenza dell'utilità di un tal metodo nelle geometriche ricerche, mi hanno invogliato di applicarlo alla risoluzione di varii difficili problemi, che per le

stampe io presento al Pubblico. Premetto de' principii che son proprii dell' oggetto ; e se la lusinga di giovare la studiosa gioventù non mi seduce, spero di avere, se non compiuto il pensiero, almeno sviluppato in parte un argomento tanto interessante, quanto quello del greco geometrizzare.



LEMMA A' PROBLEMI SEGUENTI.

SIA dato il punto A , da cui sia condotta la retta AB (*Fig. 1.*) ad un qualunque punto B della circonferenza del dato cerchio BCD . Dico essere il quadrato dell' inclinata AB uguale al rettangolo di una retta data, e di una retta in paratesi tirata dal punto B .

Si prenda il centro E del cerchio BCD , ed unite le rette AE , ed EB , si prolunghi la retta AE , finchè seghi la circonferenza del cerchio ne' punti C , e D , e dal punto B si abbassi la BF perpendicolare a DC ; sarà il quadrato di AB uguale a' quadrati di AE , e di EB insieme col doppio rettangolo AEF . Per la qual cosa presa la retta AG uguale, e per dritto ad AE , e la EH per modo, che il rettangolo GEH sia uguale a' dati quadrati di AE , e di EB ; saran dati i punti G , ed H , ed il quadrato di AB sarà uguale al rettangolo delle EG , ed FH , ovvero BK , intendendosi compito il rettangolo FK . Ma la retta EG , com' è chiaro, è data di grandezza, e la BK è una retta in paratesi tirata dal punto B , perchè forma al pari della FH angoli dati colla retta HK data di sito. Dunque il quadrato della retta AB è uguale al rettangolo di una retta data, e di una retta in paratesi tirata dal punto B .
 $C. B. D.$

Cor. Quindi, se prendasi la retta HL per dritto alla EH, e per modo, che il rettangolo delle date rette EG, ed HL sia uguale ad un dato spazio; sarà il rettangolo delle GE, ed FL uguale alla somma del quadrato di AB, e del dato spazio; e sarà poi uguale alla loro differenza, quando la HL prendasi sulla HE, e verso la medesima parte: vale a dire *la somma, ovvero la differenza del quadrato di AB, e di un dato spazio l'è anche uguale al rettangolo di una retta data, e di una retta in paratesi tirata dal punto B ad angoli retti sulla data direttrice LM perpendicolare ad AE.*

P R O B L E M A I.

Dato il punto A nella retta AB, che passi per lo centro C del cerchio BDE (Fig. 2.); fa d' uopo inclinare da esso alla circonferenza del detto cerchio la retta AF, talchè stia l' intercetta EF alla congiunta FB nella data ragione di m ad n.

Suppongasi già effettuato il problema. E poichè $EF : FB :: m : n$, sarà ancora $AF \times EF : AF \times FB :: m : n$: Ma il rettangolo di AF, ed EF è uguale alla differenza del quadrato di AF, e del dato rettangolo di AF, ed AE, la qual differenza per lo corollario del precedente lemma ne pareggia il rettangolo della data retta CG, e della retta in paratesi FH tirata sulla data direttrice HK perpendicolare a DB. Dunque sarà ancora $m : n :: CG \times FH : AF \times FB :: (CG : AF) (FH : FB)$; e con ciò sarà $m^2 : n^2 :: (CG^2 : AF^2) (FH^2 : FB^2)$. Ma AF^2 è uguale al rettan-

golo della data retta CG , e della retta in paratesi FL tirata ad angoli retti sulla data direttrice LM perpendicolare a DB , ed FB^2 è uguale al rettangolo del diametro DB , e della BN , ovvero FO , retta in paratesi tirata dal punto F sulla data direttrice BO , intendendosi compito il rettangolo NO ; dunque sarà benanche $m^2 : n^2 :: (CG^2 : CG \times FL) (FH^2 : DB \times FO) :: (CG \times FO : FL \times FO) (FH^2 : DB \times FO)$, e scambiando i conseguenti , avremo $m^2 : n^2 :: (CG : DB) (FH^2 : FL \times FO)$, ed $FH^2 : FL \times FO :: (m^2 : n^2) (DB : CG)$. Ma questa ragion composta è data , e son parallele le date direttrici LM , HK , ed OB , su cui si sono tirate dal punto F le rette in paratesi FL , FH , ed FO . Adunque il punto F sarà ad una retta data di sito parallela alle date direttrici (1). Ma l'è ancora alla circonferenza del dato cerchio DEF ; dunque il punto F sarà dato.

La composizione di questo problema , come ancora di quelli , che sieguono , per brevità si omette.

S C O L I O.

Nell' analisi di questo problema volendosi restringere il numero delle rette in paratesi , basterà supporre in quell' ultima ragion composta il rettangolo MNB uguale al quadrato della NP perpendicolare ad MB ; poichè allora il punto P , come l'è chiaro , è alla circonferenza del cerchio descritto sulla data retta MB , e sarà FH^2 ,

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* Por. II. Prop. I.

ovvero $PQ^2 : PN^2 :: (m^2 : n^2) (DB : CG)$; e con ciò sarà $PQ : PN$ anche in una data ragione: e quindi il punto P sarà ad una retta data di sito, che passa pel punto K.

P R O B L E M A II.

Dato il punto A nella retta AB, che non passi per lo centro C del cerchio BDE (Fig. 3.); fa d'uopo inclinare da esso alla circonferenza del detto cerchio la retta AF, talchè stia l'intercetta GF alla congiunta FB nella data ragione di m ad n.

Suppongasi effettuato il problema, e si congiunga la retta AC, che seghi la circonferenza del cerchio ne' punti M, e D. E poichè $GF : FB :: m : n$; sarà ancora $AF \times FG : AF \times FB :: m : n$. Ma il rettangolo di AF, ed FG è uguale alla differenza del quadrato di AF, e del dato rettangolo di AF, ed AG, la qual differenza per lo corollario del precedente lemma ne pareggia il rettangolo della retta data CH, e della retta in paratesi FK tirata sulla data direttrice KL perpendicolare ad AD. Dunque sarà ancora $m : n :: CH \times FK : AF \times FB :: (CH : AF) (FK : FB)$; e con ciò sarà pure $m^2 : n^2 :: (CH^2 : AF^2) (FK^2 : FB^2)$. Ma AF^2 è uguale al rettangolo della data retta CH, e della retta in paratesi FN tirata ad angoli retti sulla data direttrice NO, ed FB^2 è uguale al rettangolo del diametro BP, e della retta BQ, ovvero FR, intendendosi abbassata dal punto F la FQ perpendicolare a BP, e compito il rettangolo QR; dunque sarà benanche $m^2 : n^2 :: (CH^2 : CH \times FN) (FK^2 : BP \times FR) :: (CH \times FR :$

$FN \times FR$) ($FK^2 : BP \times FR$), e scambiando i conseguenti avremo $m^2 : n^2 :: (CH : BP)$. ($FK^2 : FN \times FR$) , ed $FK^2 : FN \times FR :: (m^2 : n^2) (BP : CH)$. Ma questa ragion composta è data, e la direttrice BR ne intersega, com'è chiaro, le altre due NO , e KL , che son tra loro parallele ; dunque il punto F sarà ad una data sezione conica (1) : ma l'è ancora alla circonferenza del dato cerchio BDE ; dunque il punto F sarà dato.

S C O L I O.

Egli è di bene osservare in questo luogo come in virtù del metodo degli Antichi, e per le medesime vie analitiche, dal precedente problema, ch'è di natura piano, si è giunto a risolvere quest'altro, ch'è di natura solido: la qual cosa certamente non è data in verun modo a potersi ottenere col metodo de' Moderni. Dappoichè dovendosi in esso restringere il numero delle rette in paratesi, e variandone il sito, non si potrà certamente fare un medesimo calcolo di tali rette, onde pervenire ad una identica equazione tra loro, la quale convenga nello stesso tempo ad un problema piano, e ad un problema solido. Al contrario secondo il metodo degli Antichi, quantunque sia vario il sito delle rette in paratesi, e sieno cotanto differenti per natura i detti problemi, pure abbiám veduto, che si riducono facilmente, e colla stessa analisi come due specie diverse ad uno

(1) Vedi Scorsa *Geometria Analitica* Por. II. Prop. II.

stesso genere , ossia ad uno stesso rapporto delle rette in paratesi tirate da' loro punti di riduzione. E quel ch'è veramente mirabile , si è , che la sola varietà del sito di coteste rette , ovvero delle direttrici , cui si rapportano , ne indica immanentemente la varia natura de' divisati problemi; e ciò in virtù de'porismi , che sono appunto i generi , cui si riducono i particolari problemi. Vantaggio veramente incalcolabile , e caratteristico di questo metodo degli Antichi , in cui si riducono i problemi non già alle specie , come fanno i Moderni mediante le loro equazioni , ma bensì a' generi. Lo che quanto ne agevoli la risoluzione de' problemi , e quanta enorme differenza non costituisca tra l' un metodo , e l' altro , si è abbondevolmente dimostrato dal signor Scorza nella sua Geometria Analitica.

P R O B L E M A III.

Dato il punto A nella retta AB, che passi pel centro C del cerchio BDE (*Fig. 2.*); fa d' uopo inclinare da esso alla circonferenza del detto cerchio la retta AF, talchè sia dato il rettangolo della intercetta EF, e della congiunta FB.

Suppongasi risoluto un tal problema , e si ponga il dato rettangolo uguale a quello di una data retta T, e della data retta CG doppia di CA. E poichè $AF \times FE : EF \times FB :: AF : FB$; sarà per lo corollario del precedente lemma (1) $CG \times FH : CG \times T :: AF : FB$; e con

(1) Vedi Problema 1.

ciò $FH^2 : T^2 :: AF^2 : FB^2$. Ma AF^2 è uguale a $CG \times FL$, ed FB^2 è uguale a $DB \times FO$; dunque sarà benanche $FH^2 : T^2 :: CG \times FL : DB \times FO :: (CG : DB) (FL : FO)$; e con ciò $CG : DB :: (FH^2 : T^2) (FO : FL) :: (FH^2 : T^2) (FO \times FL : FL^2)$. Or suppongasi il quadrato di NP perpendicolare ad MB uguale ad $FO \times FL$, sarà il punto P alla circonferenza del cerchio descritto sulla data retta MB, e $CG : DB :: (FH^2 : T^2) (NP^2 : FL^2)$. Ma è data la ragione di $CG : DB$; dunque sarà anche data la ragion composta di $FH : T$, e di $PN : FL$, cioè la ragion di $FH \times PN : T \times FL$; e con ciò il punto P è ad una data sezione conica (1); ma l'è ancora ad una data circonferenza di cerchio; dunque il punto P sarà dato.

P R O B L E M A IV.

Dato il segmento circolare ABC, e la retta DE (Fig. 4.) comunque inclinata alla di lui base AC; fa d'uopo tirare la retta AB per modo, che sia dato il rettangolo della intercetta FB, e della congiunta BC.

Suppongasi risoluto un tal problema, e dal punto B si tiri BG parallela alla DE, e la BH perpendicolare ad AC. Ciò premesso, sarà $AB \times BC : FB \times BC :: AB : BF :: AG : GE$ pe' triangoli simili ABG, ed AFE. Ma per la natura del cerchio $AB \times BC$ è uguale al rettangolo del diametro BK, e della BH, ed $FB \times BC$ dovendo esser da-

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* Por. I.

to, si potrà porre uguale al rettangolo della BK, e della data retta P; dunque sarà benanche $AG : GE :: BK \times BH : BK \times P :: BH : P$; e con ciò $AG \times P = GE \times BH$. Ma le AG, e GE sono uguali rispettivamente a due rette in paratesi tirate dal punto B su date direttrici (1); dunque il punto B sarà ad una data sezione conica (2); ma l'è ancora alla circonferenza del dato cerchio ABC; dunque il punto B ne sarà dato.

P R O B L E M A V.

Dato il punto A nella retta AB tirata pel centro C del dato cerchio DEB, e data la retta FG (Fig. 5.) perpendicolare a DB; fa d'uopo inclinare da esso punto A alla circonferenza del detto cerchio la retta AE per modo, che stia l'intercetta HE alla congiunta EB nella data ragione di m ad n.

Suppongasi effettuato il problema, e dal punto E si abbassi la EK perpendicolare alla DB. E poichè $m : n :: HE : EB$, sarà ancora $m : n :: (HE : AE) (AE : EB) :: (GK : AK) (AE : EB)$ pe' triangoli simili AEK, ed AHG; e con ciò sarà pure $m^2 : n^2 :: (GK^2 : AK^2) (AE^2 : EB^2)$. Ma AC^2 è uguale al rettangolo della data

(1) È chiaro, che le rette AG, e GE sono rispettivamente uguali alle rette in paratesi BL, e BM, supponendosi compiuti i parallelogrammi GL, e GM. Vale a dire le parti, che le rette in paratesi ne ascindono dalle date direttrici, e da' punti dati in esse, sono anche rette in paratesi tirate dal punto in quistione. Lo che notisi ancora ne' problemi seguenti.

(2) Vedi Scorza *Geometria Analitica* Por. I.

(9)

retta CL, e della retta in paratesi MK (1), ed EB² è uguale al rettangolo del diametro DB, e della retta in paratesi BK; dunque sarà benanche $m^2 : n^2 :: (GK^2 : AK^2) (CL \times MK : DB \times BK) :: (GK^2 : AK^2) (CL : DB) (MK \times BK : BK^2)$, e la ragion composta ($m^2 : n^2$) (DB : CL) :: ($GK^2 : AK^2$) (MK × BK : BK²). Or suppongasi MK × BK uguale al quadrato della NK perpendicolare ad MB, sarà il punto N alla circonferenza del cerchio descritto sulla data retta MB, e la ragion composta ($m^2 : n^2$) (DB : CL) :: ($GK^2 : AK^2$) (NK² : BK²). Ma è data la prima ragion composta; dunque sarà ancora data la ragion composta di GK : AK, e di NK : BK, cioè la ragione di GK × NK : AK × BK; e con ciò il punto N sarà ad una data sezione conica (2): ma l'è ancora ad una data circonferenza di cerchiò; dunque il punto N sarà dato.

PROBLEMA VI.

Dato il punto A nella retta BC, che non passi pel centro D del dato cerchio BEC, e data la retta FG (Fig. 6.) perpendicolare a BC; fa d'uopo tirare la retta AE per modo, che stia l' intercetta HE alla congiunta EC nella data ragione di m ad n.

Suppongasi risoluto il problema, e si tirino i diametri CK, ed LM, e dal punto E si abbassino le EN,

(1) Vedi il lemma.

(2) Vedi Scoria *Geometria Analitica* Por. III.

EO, ed EP perpendicolari rispettivamente alle rette BC, LM, e CK. E poichè $m : n :: HE : EC$, sarà $m : n :: (HE : AE) (AE : EC) :: (GN : AN) (AE : EC)$ pe' triangoli simili AEN, ed AHG; e con ciò sarà pure $m^2 : n^2 :: (GN^2 : AN^2) (AE^2 : EC^2)$. Ma AE^2 è uguale al rettangolo della data retta DQ, e della retta in paratesi OR, ed EC^2 è uguale al rettangolo del diametro CK, e della retta in paratesi CP; dunque sarà benanche $m^2 : n^2 :: (GN^2 : AN^2) (DQ \times OR : CK \times CP) :: (GN^2 : AN^2) (DQ : CK) (OR : CP)$, e la ragion composta $(GN^2 : AN^2) (OR : CP) :: (m^2 : n^2) (CK : DQ)$. Ma questa ragion composta è data; dunque ne sarà data ancora la ragion composta $(GN^2 : AN^2) (OR : CP)$; e perciò il punto E sarà ad un luogo lineare (1): ma l'è ancora alla circonferenza del dato cerchio BEC; dunque il punto E ne sarà dato.

PROBLEMA VII.

Dato il punto A nella retta AB, che passi pel centro C del dato cerchio DEB (Fig. 5.), e data la retta FG perpendicolare a DB; fa d'uopo inclinare da esso punto A la retta AE, talchè sia dato il rettangolo della intercetta HE, e della congiunta EB.

Suppongasi risoluto il problema, e dal punto E si abbassi la EK perpendicolare alla DB; sarà $AE^2 :$

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* pag. 302.

$HE \times EB :: (AE : HE) (AE : EB) :: (AK : KG)$
 $(AE : EB)$ pe' triangoli simili AEK , ed AHG . Ma
 AE^2 è uguale a $CL \times KM$, ed $HE \times EB$ dev' esser dato,
 che pongasi uguale al rettangolo della CL , e della data
 retta P ; dunque sarà ancora $CL \times KM : CL \times P :: (AE :$
 $HE) (AE : EB)$; e con ciò $KM^2 : P^2 :: (AK^2 : KG^2)$
 $(AE^2 : EB^2) :: (AK^2 : KG^2) (CL \times KM : DB \times BK)$
 $:: (AK^2 : KG^2) (CL : DB) (KM : BK)$; e quindi
 $CL : DB :: (AK^2 : KG^2) (P^2 : KM \times BK)$. Or suppon-
 gasi $KM \times BK$ uguale al quadrato della KN perpendico-
 lare ad MB , sarà il punto N alla circonferenza del cer-
 chio descritto sulla data retta MB , e $CL : DB :: (AK^2 :$
 $KG^2) (P^2 : NK^2)$. Ma è data la ragione di $CL : DB$;
 dunque sarà ancora data la ragion composta di $AK : KG$,
 e di $P : NK$, cioè la ragione di $AK \times P : KG \times NK$; e
 con ciò il punto N sarà ad una data sezione conica (1); ma
 l'è ancora ad una data circonferenza di cerchio; dunque
 il punto N ne sarà dato.

PROBLEMA VIII.

Data di posizione la retta AB , e'l cerchio CDE (*Fig. 7.*);
 e dato di più il punto F nella sua periferia, applicare
 tra questa, e la data AB la retta AD , talchè sia uguale
 alla data retta G , e congiunta DF sia l'angolo ADF
 uguale al dato I .

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* *Por. I.*

Suppongasi risoluto un tal problema, e si prolunghi la AD, finchè incontri in C la circonferenza del dato cerchio, sarà dato un tal punto per esser dato l'angolo CDF conseguente del dato I. Ciò premesso, dal punto C si tiri CB perpendicolare ad AB, e dal punto D la DG perpendicolare a CB, e si compia il parallelogrammo BH; saran simili i triangoli CGD, ed AHD; e con ciò $CD^2 : DG^2 :: AD^2 : DH^2$. Ma tirato il diametro DK, ed unite le rette DE, ed EK, abbiamo pe' triangoli simili CDG, e DEK $CD^2 : DG^2 :: DK^2 : DE^2$, dunque sarà ancora $DK^2 : DE^2 :: AD^2 : DH^2$, e $DE^2 : DH^2 :: DK^2 : AD^2$. Ma DE^2 è uguale al rettangolo del diametro EL, e della retta EM, intendendosi abbassata dal punto D la DM perpendicolare ad EL, e prese sulla retta AH le AN, ed AO uguali ciascuna alla data retta AD, saranno i punti N, ed O a due rette date di sito parallele ad AB, e DH^2 uguale ad $NH \times HO$; adunque sarà benanche $EL \times EM : NH \times HO :: DK^2 : AD^2$: ma questa ragione è data, e le rette EM, NH, ed HO sono rette in paratesi tirate dal punto D su date direttrici; dunque il punto D sarà ad una data sezione conica (1): ma l'è ancora alla circonferenza del dato cerchio CDE; dunque il punto D ne sarà dato.

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* *Por. I.*

S C O L I O.

Un tal problema fu risoluto in altra guisa dal nostro gran Geometra il Signor Fergola ne' primi anni di sua giovinezza, ed è il secondo porisma di una sua elegantissima dissertazione inserita negli atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli per l'anno 1788.

P R O B L E M A IX.

Dati i due cerchi ABC, e DEF, e'l punto A (*Fig. 8.*); che stia per dritto co' loro centri G, ed H; fa d'uopo tirare la retta AE per modo, che l'intercetta KE sia uguale ad una retta data.

Suppongasi risoluto il problema, e dal punto E si tiri EL perpendicolare ad AF, e la EB tangente del cerchio ABC; indi si congiungano le rette GB, e GE, sarà $AE \times EK = EB^2 = GE^2 - GB^2$. Ma $GE^2 - GB^2$ per lo corollario del precedente lemma è uguale ad $MH \times LO$; dunque sarà $AE \times EK = MH \times LO$; e con ciò sarà $AE^2 : LO^2 :: MH^2 : EK^2$; ma AE^2 è uguale ad $NH \times LP$; dunque sarà benanche $NH \times LP : LO^2 :: MH^2 : EK^2$. Or questa ragione è data, e le rette LP, ed LO sono rette in paratesi tirate dal punto E su date direttrici parallele; quindi un tal punto sarà ad una retta data di sito parallela alle date direttrici (1): ma l'è ancora alla circon-

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* Por. I.

ferenza del dato cerchio DEF; dunque il detto punto E ne sarà dato.

P R O B L E M A X.

Dati i due cerchi ABC, DEF, e'l punto G nella periferia del cerchio DEF (*Fig. 9, e 10.*), adattare tra le periferie de'detti cerchi la retta FB, talchè sia data, e congiunta la FG, sia l'angolo FBG uguale al dato H.

Suppongasi effettuato il problema, e sieno K, ed I i centri de'dati cerchi, e si prolunghi la BF, finchè incontri in D la circonferenza del cerchio DEF, sarà dato, com'è chiaro, il punto D. Ed essendo i dati cerchi l'uno al difuori dell'altro (*Fig. 9.*), in tal caso dal punto B si tiri la BE tangente del cerchio DEF, e le BL, e BM perpendicolari alle congiunte KD, e KI; sarà $DB \times BF = BE^2 = BI^2 - IE^2$, intendendosi congiunte le IB, ed IE. Ma $BI^2 - IE^2$ è uguale ad $NK \times MO$; dunque sarà pure $DB \times BF = NK \times MO$; e con ciò $DB^2 : MO^2 :: NK^2 : BF^2$. Ma DB^2 è uguale a $PK \times LQ$; dunque sarà benanche $PK \times LQ : MO^2 :: NK^2 : BF^2$. Or questa ragione è data, e le QL, ed MO sono rette in paratesi tirate dal punto B su date direttrici, che s'intersecano; dunque il punto B sarà ad una data parabola (1): ma l'è ancora ad una data circonferenza di cerchio; dunque il punto B ne sarà dato.

(1) Vedi Scorra *Geometria Analitica. Por. I. Scol. Prop. I.*

Che se poi il cerchio ABC (*Fig. 10.*) cada dentro dell' altro DEF , in tal caso si prolunghi la BL , finchè seghi in E , ed N la circonferenza del cerchio DEF , e dal centro I del detto cerchio DEF si abbassi la IO perpendicolare ad NE , e si uniscano le IB , ed IN. Ciò premesso , sarà $DB \times BF = EB \times BN = IN^2 - IB^2$. Ma questa differenza è uguale al rettangolo della data retta P , e della retta in paratesi MQ (1) ; dunque sarà benanche $DB \times BF = P \times MQ$; e con ciò sarà pure $DB^2 : MQ^2 :: P^2 : BF^2$: ma DB^2 è uguale al rettangolo della data retta R , e della retta in paratesi SL ; dunque sarà $R \times SL : MQ^2 :: P^2 : BF^2$. Ma questa ragione è data ; dunque sarà data ancora la ragione di $R \times SL : MQ^2$: e quindi il punto B sarà ad una data parabola : ma l' è ancora ad una data circonferenza di cerchio ; dunque il punto B sarà dato.

S C O L I O.

Questo problema solido , a cui facilmente riduconsi molti altri difficili problemi di sito , fu ingegnosamente risoluto dal Signor Annibale Giordano nella sua dissertazione inserita negli atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli per l' anno 1788 ; ivi questo nostro Geometra prende il punto di riduzione del detto problema nella periferia di un cerchio diverso da' proposti. Ma nella ri-

(1) Vedi il corollario del lemma premesso a questi Problemi.

soluzione quassù recata per mezzo del metodo delle rette in paratesi mi è riuscito di pervenire all' intento, ed in agevol modo, senza mica deviare dal soggetto in quistione, e servendomi di guida l' analisi del facilissimo problema precedente, ch' è piano di sua natura: il qual vantaggio, come si è già rilevato nello Scolio del problema II, è certamente singolarissimo, e tutto proprio di questo metodo degli Antichi.

P R O B L E M A X L

Dato l'angolo ABC, tra i di cui lati AB, e BC muovasi la data retta AC, e preso ovunque in essa il punto D (*Fig. 11.*); fa d'uopo ritrovare la linea, che si verrà con tal moto a descrivere dal detto punto.

Suppongasi risoluto il problema, e da' punti A, e D si abbassino le rette AE, e DF perpendicolari alla BC. E poichè il triangolo ABE è dato di specie, sarà $BE^2 : AE^2$ nella data ragione di m ad n. Ma $AE^2 : DF^2$ nella data ragione di $AC^2 : CD^2$; dunque sarà benanche data la ragione di $BE^2 : DF^2$. Or si ponga FG uguale alla BE, e congiunta DG, sarà dato ancora di specie il triangolo rettangolo DFG, e la BG uguale alla EF. Inoltre pe' triangoli simili AEC, e DFC, sarà EF^2 , ovvero $BG^2 : FC^2 :: AD^2 : DC^2$, e prese sulla retta DF, le FH, ed FK uguali ciascuna alla data retta DC; saranno i punti H, e K a due rette date di sito parallele a BC, ed $FC^2 = DK \times DH$; dunque sarà benanche $BG^2 : KD \times DH :: AD^2 : DC^2$. Ma questa ragione è data, e le

rette BG , DK , e DH sono rette in paratesi tirate dal punto D sulle date direttrici; dunque il detto punto sarà ad una data sezione conica (1).

P R O B L E M A XII.

Dividere la data retta AB (*Fig. 12.*) nel punto C per modo, che stia AC alla data retta D, come il quadrato della data retta E al quadrato della retta CB.

Suppongasi risoluto il problema. E poichè $AC : D :: E^2 : CB^2$, sarà $AC \times D : D^2 :: E^2 : CB^2$; quindi supponendosi $AC \times D$ uguale al quadrato della CF perpendicolare ad AB, sarà il punto F ad una data parabola; e con ciò sarà benanche $CF^2 : D^2 :: E^2 : CB^2$, e $CF \times CB = D \times E$; laonde avremo $CF^2 : CF \times CB :: AC \times D : D \times E$, ovvero $CF : CB :: AC : E$, e con ciò $CF \times E = CB \times AC$; e sarà pure $CB \times AC + AC \times D = CF \times E + CF^2$, o ch'è lo stesso $AC (CB + D) = CF (CF + E)$; e prendendosi le rette BG, e CH per dritto alle AB, ed FC, ed uguali rispettivamente alle date rette D, ed E, sarà $AC \times CG = FH \times FC$. Ma le rette AC, CG, FH, ed FC sono rette in paratesi tirate dal punto F sulle date direttrici AK, GL, KL, ed AG, intendendosi compito il rettangolo AL; dunque il punto F sarà ad una data circonferenza di cerchio (2): ma l'è ancora ad una data parabola; dunque il punto F ne sarà dato.

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica* Por. II.

(2) Vedi Scorza *Geometria Analitica* Por. III. Prop. II.

S C O L I O.

Questo problema è il lemma, cui Archimede ridusse la divisione della sfera in data ragione (1). Bisogna però notare, che dall'analisi quassù recata, apparisce essere il punto F non solo ad una data parabola, ma ancora ad una data iperbole: dappoichè il rettangolo delle rette CF , e CB è uguale al rettangolo delle date rette D , ed E . Quindi il detto lemma di Archimede si potrebbe ascondere in questi due altri, ch'enuncio nel seguente modo: cioè I. *data la parabola AF riferita all'asse AB , in cui sia dato il punto B ; fa d'uopo rinvenire il punto F nel perimetro parabolico, sicchè ordinata la FC all'asse, sia il rettangolo delle rette FC , e CB di una data grandezza*: II. *data l'iperbole FN riferita agli assintoti ortogonali AB , e BM , e dato il punto A nell'assintoto AB , ritrovare nel perimetro iperbolico il punto F talchè ordinata la FC , sia il quadrato di questa ordinata uguale al rettangolo della AC , e della data retta D* . Ma il voler poi ridurre il problema della divisione della sfera in data ragione ad uno di questi due lemmi sarebbe lo stesso, che il voler puerilmente travestire la soluzione fattane dall'immortale Archimede.

(1) Vedi Scorza *Geometria Analitica Scol.* pag. 274.

LEMMA A' SEGUENTI PROBLEMI

DELLE

T A Z I O N I.

Data la retta AB, ed i cerchi CDE, ed FGH (*Fig. 13*); fa d' uopo descrivere un cerchio, che tocchi i dati cerchi, ed abbia il centro nella retta data.

Suppongasi già effettuato il problema, e sia K il centro del richiesto cerchio CF, il quale tocchi ne' punti C, ed F i dati cerchi CDE, ed FGH; sarà chiaro, che le congiungenti KC, e KF passeranno pe' loro rispettivi centri L, ed M. Ed essendo primieramente uguali i cerchi CDE, ed FGH, saranno anche uguali le KL, e KM, ed abbassata la KN perpendicolare alla congiunta LM, sarà $LN = NM$; e con ciò sarà dato il punto N, e la data retta KN segnerà il centro K nella data retta AB. Che se poi i detti cerchi CDE, ed FGH sieno dissuguali, in tal caso supposto essere CDE maggiore di FGH, sarà $KL^2 - KM^2 = LN^2 - NM^2$. Ma (1) $KL^2 - KM^2 = CL^2 - FM^2 + 2QCXCK$, intendendosi essere CQ la differenza de' raggi LC, ed MF, e bisecata la retta LM nel punto O, $LN^2 - NM^2 = 2LMXNO$. Adunque sarà ancora $CL^2 - FM^2 + 2QCXCK = 2LMXNO$; e facendosi $CL^2 -$

(1) Come si rileva dalla *prop. IV* del *II. lib.* degli *El.* di Euclide.

$FM^2 = 2LM \times OP$, sarà dato il punto P , e $2QC \times CK = 2LM \times NP$; e con ciò avremo CK ad NP , ovvero compito il rettangolo NR , alla sua uguale KR nella data ragione di LM a QC . Or se la data retta PR sia parallela alla data retta AB , allora sarà anche data la PN , com'è chiaro, e tutta la MK , ed il punto K sarà dato. Ma se poi la PR non è parallela ad AB , in tal caso poniamo, che l'incontri nel dato punto S , sarà data la ragione di $KS : KR$ a cagione del triangolo KSR dato di specie; e con ciò sarà anche data la ragione di $KC : KS$. Laonde presa la ST per modo, che stia la CL ad ST in questa data ragione, ed unite le rette CS , ed LT , sarà dato il punto T , e la SC parallela alla TL . Adunque si ridurrà il problema a tirare dal dato punto S la retta SC parallela alla data retta TL : ed è manifesto, che vi saranno due punti soddisfacenti al quesito, quante volte la retta SC sega il dato cerchio CDE , e ve ne sarà un solo, se mai lo tocca; che se poi non l'incontra, allora il problema sarà impossibile.

COROLL. Quindi ben si vede, che il raggio KC del cerchio CF , che tocca i dati cerchi CDE , ed FGH stia in una data ragione alla retta in paratesi KR tirata dal centro.

A L T E R.

Da' centri L , ed M de' dati cerchi si abbassino le rette LA , ed MB perpendicolari ad AB (Fig. 14), e si prolunghino ne' punti E , e G ; sarà $KL^2 = AL^2 + AK^2$,

e toltone di comune LC^2 , resterà $DKC = EAN + AK^2$. Similmente avremo $HKF = GBO + KB^2$, e quindi la differenza de' rettangoli DKC , ed HKF , cioè $(DC - HF)$ KC sarà uguale alla differenza de' dati rettangoli EAN , GBO , e de' quadrati di AK , e di KB . Ma questa differenza de' quadrati di AK , e di KB è uguale a $2AB \times KP$, ove P dinota il punto medio della data retta AB , e la differenza di que' dati rettangoli si potrà porre uguale a $2AB \times PQ$; dunque saranno le dette differenze prese insieme uguali a $2AB \times KQ$; e con ciò sarà benanche $(DC - HF) KC = 2AB \times KQ$, e $KC : KQ :: 2AB : (DC - HF)$. Ma questa ragione è data; dunque sarà data la ragione di $KC : KQ$. Inoltre facciasi $CL : QR :: KC : KQ$, saranno parallele le congiunte CQ , ed LR , e sarà data di sito la retta LR , per esser data la QR . Adunque il problema si ridurrà a tirare dal dato punto Q la retta QC parallela alla retta LR data di sito.

PROBLEMA XIII.

Dati due punti A , e B , e'l cerchio CDE (*Fig. 15*), fa d' uopo descrivere un cerchio, che tocchi il cerchio dato, e passi pe' punti dati.

Suppongasì effettuato il problema, e sia G il centro del cerchio richiesto ABC , che tocchi nel punto C il dato cerchio CDE ; è chiaro, che la congiungente GC ne passerà per lo centro H del cerchio CDE . Ma per ipotesi il cerchio ABC dee passare pe' dati punti A , e B . Adunque unita la retta AB , ed abbassatale dal centro G la perpendico-

lare GF, questa la biseccherà nel punto F, che sarà dato per essere data la retta AB; e con ciò la FG sarà data di sito. Quindi unita la retta BH, ed abbassata la GK perpendicolare a BH, avremo $GH^2 - GB^2 = HK^2 - KB^2$, e bisecata la data retta BH nel punto I, e posto $HC^2 = 2BH \times IL$, rileveremo nello stesso modo dianzi, che stia la GC a KL, ovvero alla retta in paratesi GM nella data ragione di BH ad HC. Or poniamo, che la data retta LM incontri nel dato punto N la data retta FG, sarà data la ragione di GM a GN a cagione del triangolo GNM dato di specie; e con ciò sarà anche data la ragione di GC a GN, che facciasi uguale a quella della data retta CH ad NO, ed unite le rette CN ed HO, saranno queste rette parallele tra loro, ed il problema del pari, che il precedente lemma si ridurrà a tirare dal dato punto N la retta NC parallela alla retta HO, ch'è data di sito.

COROLL. Resta dunque dimostrato, *che se il cerchio ABC tocchi il dato cerchio CDE, e passi pel punto dato B, il raggio GC di esso starà alla retta in paratesi GM tirata dal centro in una data ragione.*

A L I T E R.

Si abbassi dal centro H la HP perpendicolare alla retta FG, sarà $DG \times GC = EPQ + PG^2$, intendendosi prolungate le rette PH, e GH fino alla circonferenza ne' punti D, ed E (1), e sarà la differenza del rettangolo

(1) Vedi il principio dell'analisi del lemma precedente.

DGC, e del quadrato di GB, ovvero $DC \times GC$ uguale alla differenza de' dati spazii EPQ, e BF^2 insieme colla differenza de' quadrati di PG, e di GF; onde il problema del pari, che il lemma precedente, si ridurrà a tirare da un punto dato nella FG una retta parallela ad un'altra data di sito, che passa pel centro H.

PROBLEMA XIV.

Dato il punto A, la retta BC, ed il cerchio DE (Fig. 16); fa d'uopo descrivere un cerchio, che tocchi il cerchio dato, la retta data, e passi pel punto dato.

Suppongasi risoluto il problema, e sia F il centro del cerchio richiesto ABD, il quale tocchi nel punto B la retta data, e nel punto D il cerchio dato DE; sarà com'è chiaro, la retta FB, che unisce i punti F, e B, perpendicolare a BC, e la FD, che unisce i punti F, e D, passerà per lo centro G del cerchio DE, e ciascuna delle rette FB, ed FD sarà uguale alla congiungente AF. E poichè il cerchio ABD tocca il cerchio dato DE, e passa pel punto dato A, sarà pel corollario del problema precedente FD ad una retta in paratesi tirata dal centro F in una data ragione. Ma FD è uguale ad FB, ch'è ancora una retta in paratesi tirata dal medesimo punto F; dunque il punto F sarà ad una retta data di sito, che poniamo essere la FK, e che incontri la data retta CB nel dato punto K. E poichè l'angolo FKB è dato, e l'angolo FBK è retto, sarà data la ragione di FB, o della sua uguale FD ad FK, che facciasi uguale a quella

delle date rette GD , e KI , ed unite le rette KD , ed IG , saranno queste rette tra loro parallele, ed il problema del pari, che il lemma precedente, si ridurrà a tirare dal dato punto K la retta KD parallela alla retta GI , ch'è data di sito.

PROBLEMA XV.

Data la retta AB , ed i cerchi CDE , ed FGH (*Fig. 17*); fa d'uopo descrivere un cerchio, il quale tocchi la data retta, ed i cerchi dati.

Suppongasi risoluto il problema, e sia K il centro del cerchio richiesto ACF , che tocchi la data retta AB nel punto A , ed i dati cerchi CDE , ed FGH ne' punti C , ed F ; saranno tra loro uguali le congiungenti KA , KC , e KF , delle quali la KA sarà perpendicolare ad AB , e le KC , e KF passeranno pe' centri M , ed N de' dati cerchi CDE , ed FGH . E poichè il cerchio ACF tocca i dati cerchi, sarà per lo corollario del lemma precedente il raggio KC ad una retta in paratesi tirata dal centro K in una data ragione: ma KC è uguale a KA , ch'è ancora una retta in paratesi; dunque il punto K sarà ad una retta data di sito, che poniamo essere la PK . Quindi il cerchio ACF , che tocca i dati cerchi CDE , ed FGH , ed ha il centro nella data retta PK , si descriverà per lo lemma precedente.

PROBLEMA XVI.

Dato il punto A, ed i cerchi BCD, ed EFG (*Fig. 18*), fa d' uopo descrivere un cerchio, che passi pel dato punto, e tocchi i cerchi dati.

Suppongasì effettuato il problema, e sia H il centro del cerchio richiesto ABE, che passi pel dato punto A, e tocchi i dati cerchi BCD, ed EFG ne' punti B, ed E; saranno tra loro uguali le congiungenti HB, HE, ed HA, delle quali le HB, ed HE passeranno pe' centri M, ed N de' dati cerchi BCD, ed EFG. E poichè il cerchio ABE tocca i dati cerchi BCD, ed EFG, sarà (*cor. lem. prec.*) il raggio HE ad una retta in paratesi tirata dal centro H in una data ragione. Similmente perchè il cerchio ABE tocca il dato cerchio EFG, e passa pel punto dato A, sarà (*cor. prob. XIII.*) il raggio HE ad una retta in paratesi tirata dal centro H in una data ragione. Adunque per equalità ordinata le due rette in paratesi tirate dal centro H saranno tra loro anche in una data ragione; e perciò il punto H sarà ad una retta data di sito, che poniamo essere HQ. Quindi il cerchio ABE, che tocca i dati cerchi BCD, ed EFG, ed ha il centro nella data retta HQ, si descriverà per lo lemma precedente.

PROBLEMA XVII.

Dati i tre cerchi ABC, DEF, e GHK (*Fig. 19*), fa d' uopo descrivere un cerchio, che tocchi i cerchi dati.

Suppongasi risoluto il problema , e sia O il centro del richiesto cerchio ADG , il quale tocchi ne' punti A , D , e G i dati cerchi ABC , DEF , e GHK ; saranno tra loro uguali le congiungenti OA , OD , ed OG , le quali passeranno pe' centri L , M , ed N de' dati cerchi ABC , DEF , e GHK . E poichè il cerchio richiesto ADG tocca i cerchi dati ABC , e DEF , sarà (*cor. lem. prec.*) il raggio OD ad una retta in paratesi tirata dal centro O in una data ragione. Similmente perchè il cerchio ADG tocca i dati cerchi DEF , e GHK , sarà il raggio OD ad una retta in paratesi tirata dal centro O in una data ragione. Adunque per equalità ordinata le due rette in paratesi tirate dal punto O saranno anche in una data ragione , ed il punto O sarà ad una retta data di sito , che poniamo essere OP . Quindi il cerchio ADG , che tocca i dati cerchi ABC , e GHK , ed ha il centro nella data retta OP si descriverà per lo lemma precedente.

ANALISI APOLLONIANA DELLO STESSO PROBLEMA , DIVINATA
DAL SIGNOR SCORZA (1).

Sieno ABC , DEF , e GHI (*Fig. 20*) i tre cerchi dati i cui centri sieno M , N , ed O ; e si supponga , che il cerchio AEI li tocchi rispettivamente ne' punti A , E , ed I . Si congiungano le AE , EI , ed AI . E poichè la porzione di cerchio AKB è simile all'altra AXE (2) , ed

(1) Vedi Flauti *Geometria di sito pag. 299. Edizione del 1815.*

(2) Vedi l'opera testè citata *pag. 297.*

a questa è anche simile la DLE, saranno simili tra loro le porzioni AKB, e DLE; che perciò la AE dovrà incontrare la congiungente MN de' centri de' cerchi ABC, e DEF nel punto P, ov'essa è divisa proporzionalmente a' raggi di quelli. Similmente la AI dovrà incontrare la congiungente MO de' centri M, ed O de' cerchi ABC, e GHI nel punto Q, ove quella è divisa in proporzione de' raggi di questi. E così pure la NR sarà alla RO, come il raggio del cerchio DEF a quello del cerchio GHI. Laonde i tre punti P, Q, ed R saranno allogati in una retta data di sito (1). Ciò posto, dal punto E si tiri la ES parallela alla PQ, e congiungasi la SI, che incontri in T al PQ, sarà l'angolo STQ uguale al suo alterno ESI: ma l'angolo ESI pareggia l'angolo EAI, con cui giace nella stessa porzione EXI; dunque sarà l'angolo STQ uguale all'angolo EAI, ed il triangolo APQ sarà simile al triangolo ITQ. Laonde sarà $PQ : QA :: QI : QT$, ed il rettangolo PQT sarà uguale al rettangolo AQI. Ma il rettangolo AQI è dato; adunque sarà anche dato il rettangolo PQT; e con ciò sarà data la retta QT, ed il punto T.

Inoltre congiungasi la GH: ed essendo la porzione circolare IGH simile all'altra IAE, sarà l'angolo IGH uguale all'angolo IAE, e la GH parallela ad AE. Laonde se le GH, e PQR s'incontrino in V, sarà il triangolo GVQ simile al triangolo APQ, e quindi anche al triangolo ITQ, ed il rettangolo VQT sarà uguale all'altro GQI, ch'è dato; onde sarà anche dato il rettangolo VQT,

(1) *Ibidem.*

e per conseguenza il punto V. Ed il proposto problema si ridurrà ad inflettere al dato cerchio GHI da' punti dati Q, ed R la retta QIR per modo, che GH stia per dritto con VH (*prop. 117. lib. VII. Coll. Mat. di Pappo.*)

S C O L I O.

L' Illustre Francesco Vieta volendo risolvere questo problema nel suo *Apollonio Gallo*, non si valse a tal proposito, come dovea, de' lemmi di Pappo, che sono in vero le indicazioni sicure delle analitiche vie tenutesi dal gran Geometra di Perga ne' suoi libri delle *Tazioni*, forse perchè il leinma XXII. non gli parve a prima fronte avere alcuna relazione col detto problema de' tre cerchi: non dimeno seppe egli condurne l'analisi in altro modo, ed assai facilmente, cambiando soltanto alcuni dati del problema. Imperciocchè prese il centro O del richiesto cerchio per punto di riduzione, da cui tirando a' centri L, M, ed N de' cerchi dati le rette OL, OM, ed ON si avvide, che sebbene queste rette non sieno date di grandezza, purc prese a due a due hanno tra loro una data differenza. Quindi se descrivasi un cerchio col centro O, e coll' intervallo MO, che sia la più piccola di esse, questo com'è chiaro, segnando le altre due rette OL, ed ON ne' punti Q, ed R, ne toccherà quivi due cerchi dati QS, ed RI per essere date di grandezza le QL, ed RN; per cui il valentuomo ne ridusse il problema de' tre cerchi a *descrivere un cerchio, che tocchi*

i due cerchi dati QS, ed RI, e passi pel dato punto M. Non così però fece Adriano Romano, che dal medesimo Vieta fu provocato a risolvere un tal problema: dappoich' ei non descrisse il cerchio, come di poi ne fece il Vieta, ma bensì le iperboli, cui si appartiene il punto O in virtù delle date differenze, che le rette OL, OM, ed ON hanno tra di loro, risolvendo per tal guisa come un problema solido quello, ch'era di natura piano, di che ei giustaente fu ripreso dallo stesso Vieta.

Era pertanto serbato al Cavalier Newton di promuovere quest'analisi di Adriano Romano, sviluppandone com'era debito, quelle condizioni locali del punto in questione, onde rinvenire due luoghi piani confacenti alla natura del problema. In fatti essendosi già rilevato, che il punto O sia nel perimetro di un' iperbole, di cui L, ed M sono i dati fuochi, ed LO, ed MO i rami tirati da essi ad un punto O del dilei perimetro, ben si rammentò il Newton di quella proprietà notissima di detta curva cioè, che *la perpendicolare tirata dal punto O sulla direttrice corrispondente al ramo MO stia a questo medesimo ramo in una data ragione.* Similmente perchè il punto O trovasi nel perimetro di un'altra iperbole, i di cui fuochi sono i dati punti M, ed N, ed MO, ed NO sono i rami tirati da essi ad un medesimo punto del suo perimetro, sarà ancora *il ramo OM alla perpendicolare tirata dal punto O sulla direttrice corrispondente a questo ramo in una data ragione,* e perciò saggiamente ne conchiuse, che le due perpendicolari tirate dal punto O sulle dette direttrici sieno anche in una data

ragione, onde il punto O dee essere in una retta data di sito. Ma perchè il punto O si rinviene ancora in un'altra iperbole, com'è chiaro, a cagion delle rette OL , ed ON aventi tra loro una data differenza, sarà benanche il punto O ad un'altra retta data di sito. Ed in tal modo da que' luoghi solidi, che ne rinvenne Adriano Romano, seppe il Newton rilevare i luoghi piani, lo che piacque a' Geometri grandemente. Se non che ad alcuni dispiace, che nell' analisi di questo problema piano debbasi tener conto della proprietà di quel luogo solido, ove ne giace il punto in quistione; per cui il nostro gran geometra il Signor Fergola volendo togliere questo neo dall' analisi Newtoniana, imprese a dimostrare indipendentemente dalla natura dell' iperbole, che il vertice O del triangolo LOM , di cui n'è data la base LM , e data la differenza de' lati LO , ed OM , abbiano ancora quella medesima proprietà, che si è detto avere nel perimetro di essa curva. In tal guisa con questa proprietà del triangolo venne egli a risolvere egregiamente non solo il problema de' tre cerchi; ma ancora tutti gli altri, che si appartengono alla famiglia delle *Tazioni* (1). Qui però col metodo delle rette in paratesi senza mica tener conto della data differenza de' lati del triangolo LOM , che in vero ne addita mai sempre il luogo del punto O essere ad una iperbole, ma bensì considerando la data differenza de' raggi LA , ed MD de' cerchi ABC , e DEF , mi è riuscito di rilevare una proprietà del cerchio ADG , che insiem li tocca ne' punti

(1) Vedi Atti della nostra Reale Accademia per l' anno 1819.

A, e D: cioè che il raggio del detto cerchio stia in una data ragione alla retta in paraleli tiratane dal centro; il qual principio mi ha guidato mirabilmente non solo nell'analisi del problema de' tre cerchi, ma in quella benanche degli altri affini: che anzi da esso potrebbesi ancora facilmente rilevare quella proprietà del triangolo, variandosi allora le rette in paraleli, e le date direttrici, ciò che dimostra la naturalezza insieme, e l'attività somma di cotesto metodo anche ne' problemi piani.

P R O B L E M A XVIII.

Descrivere una piramide triangolare, di cui sia data la base, e gli angoli al vertice.

Suppongasì effettuato il problema (*Fig. 21.*), e sia ABCD la piramide richiesta, di cui il triangolo ABC sia la data base, ed ADB, BDC, e CDA i dati angoli al vertice, sarà dato di magnitudine l'angolo solido D da essi compreso: e posto, che nel piano dell'angolo ADB sia dato di sito la retta AB, che per ipotesi è anche data di grandezza, sarà chiaro, che il vertice D della piramide ne tocca la circonferenza della data porzione di cerchio ADB descritta sulla data retta AB, e capiente il dato angolo ADB. Ma essendo dato il triangolo ACB, la sua altezza CE sarà data di magnitudine, ed il punto E dato di sito, d'onde tirata nel piano ADB la EF perpendicolare ad AB, sarà benanche la EF data di sito, ed intendendosi abbassata dal punto C la CF perpendicolare ad EF, sarà CF perpendicolare al piano ADB,

ed il piano delle rette FC , e CD sarà ancora perpendicolare allo stesso piano ADB . Ma questi due piani sono dati a cagione del dato angolo solido D : dunque sarà data di sito la di loro comune sezione DF , e con ciò saranno dati gli angoli ADF , ed FDC , e dato l'arco AG , su cui ne insiste l'angolo ADF , ed il punto G sarà dato di sito, ed il triangolo rettangolo CFD dato di specie; onde sarà data la ragione del quadrato di CF al quadrato di FD , che pongasi uguale a quella delle date rette H , ed I . Per la qual cosa prese nella retta FE d'ambe le parti del dato punto E le EK , ed EL uguali ciascuna alla data retta CE , saran dati di sito i punti K , ed L , ed il rettangolo KFL sarà uguale alla differenza de' quadrati di EF , e di EL , ovvero di EC cioè al quadrato di FC ; onde al pari di questo sarà benanche il rettangolo KFL al quadrato di FD nella data ragione di H ad I . Ciò posto, si uniscano le rette GK , e GL , che seghino la circonferenza del cerchio ne' dati punti M , ed N , e dal punto D si tirino sulle date rette GM , e GN le DP , e DO parallele alla data retta KL . E poichè la ragione del rettangolo KFL al quadrato di FD componesi dalle ragioni del rettangolo KFL al quadrato di FG , e del quadrato di FG al quadrato di FD , ovvero dalle loro uguali, cioè dalle ragioni del rettangolo PDO al quadrato di DG , e del quadrato di GK al quadrato di KP , sarà benanche H ad I in ragion composta del rettangolo PDO al quadrato di DG , e del quadrato di GK al quadrato di KP . Ma condotte dal punto D sulle GM , e GN le DR , e DS , parallele alla congiunta MN ch'è data di sito, ed incon-

tra la GD in un punto Q, sarà chiaro, che il rettangolo PDO stia al quadrato di DG in ragion composta del rettangolo PDO al rettangolo RDS, e del rettangolo RDS al quadrato di DG, delle quali ragioni la prima n'è data pe' triangoli dati di specie DPR, e DOS, che pongasi uguale a quella delle date rette GM, e T, e la seconda ne pareggia la ragione del rettangolo MQN, o del suo uguale DQG al quadrato di QG, cioè alla ragione di DQ a QG, ovvero di RM ad MG. Adunque sarà pure il rettangolo PDO al quadrato di DG in ragion composta di RM ad MG, e di MG a T, cioè come RM a T. Ma si è dimostrato dianzi essere H ad I in ragion composta del rettangolo PDO al quadrato di DG, e del quadrato di GK al quadrato di KP. Dunque sarà ancora H ad I in ragion composta di RM a T, e del quadrato di GK al quadrato di KP, e ponendosi il quadrato di GK uguale al rettangolo delle rette T, e V, sarà H ad I in ragion composta di RM a T, e del rettangolo TV al quadrato di KP, vale a dire come il parallelepipedo, che ha per base il rettangolo RMV, e per altezza la retta T al parallelepipedo, che ha per base il quadrato di KP, e per altezza la stessa retta T, ossia come il rettangolo RMV al quadrato di KP; e compiti i parallelogrammi RU, e PX, sarà H ad I, come il rettangolo UDV al quadrato di DX; e perciò il punto D sarà ad una data parabola (1): ma n'è ancora alla data circonferenza del cerchio ADB. Dunque il punto D sarà dato.

(1) Vedi Scorza Geometria Analitica Scol. Prop. II. Por. I.

S C O L I O.

Questo problema utilissimo in Geodesia, a cui si sono occupati finora tanti Geometri, ed Analisti, era di bene, che per compimento dell'opera qui il recassi una con l'elegante soluzione, che il Signor D. Giuseppe Scorza di già ne produsse nella sua Geometria analitica, affin di mostrare sempre più l'attività di cotesto Metodo degli Antichi anche in quello, che riguarda la pratica. Pertanto non sarà fuori di proposito sviluppare in questo luogo ciò, che il Principe degli Analisti il Signor de la Grange lasciò scritto sul medesimo problema, dicendone a tal uopo (1) » D' un point dont la position est incon-
 » nue, on a observé trois objets, dont les distances re-
 » spectives sont connues, et on a déterminé les trois angles
 » formés par les rayons visuels, menés de l'œil de l'ob-
 » servateur à ces trois objets. On demande la position
 » du lieu de l'observateur par rapport aux mêmes objets.

» Si on lie les trois objets par des lignes droites, il
 » est visible que ces trois droites avec les trois rayons
 » visuels formeront une pyramide triangulaire, dont la
 » base sera donnée, ainsi que les trois angles qui for-
 » ment l'angle solide du sommet, auquel l'observateur
 » est supposé placé; et la question sera réduite à déter-
 » miner les dimensions de cette pyramide.

(1) Vedi *Cours de Sciences et Arts, par des Professeurs Célèbres. Anno*
 1808. Tome Quatrième pag. 411.

» Comme la position d'un point dans l'espace est
 » entièrement déterminée par ses trois distances à trois
 » points donnés, il est clair que le problème sera réso-
 » lu, si on détermine les trois distances du point où est
 » l'observateur à chacun des trois objets. Or, en pre-
 » nant ces distances pour inconnues, on aurait trois équa-
 » tions du second degré, qui par l'élimination, donneraient
 » une équation finale du huitième degré; mais en pre-
 » nant pour inconnues une des distances et les rapports
 » des deux autres à celle-ci, l'équation finale ne sera
 » que du quatrième degré. On pourrait donc résoudre ce
 » problème rigoureusement par les méthodes connues;
 » mais la solution directe étant compliquée et peu com-
 » mode pour la pratique; voici celle qu'on pourra trouver
 » par la courbe des erreurs ».

Vale a dire, supponendo ABCD esser (*Fig. 22.*) la
 richiesta piramide triangolare, e chiamando a, b, c i
 lati AB, AC, BC della data base di ~~esser~~ x, y, z i
 rimanenti suoi lati CD, BD, AD, ~~ed m, n, p~~ m, n, p i coseni
 de' dati angoli ADB, ADC, e BDC, si avranno tre equa-
 zioni a cagione de' triangoli ADC, CDB, ed ADB, cioè

$$a^2 = z^2 + y^2 - 2mzy$$

$$b^2 = z^2 + x^2 - 2nzx$$

$$c^2 = y^2 + x^2 - 2pxy$$

ove ben si vede, che ~~domanda~~ ^{finale} di queste tre equazioni
 sia di ottavo grado. Ma volendola abbassare al quarto,
 basterà in esse porre $\frac{z}{x} = u$, ed $\frac{y}{x} = v$; dappoichè

allora le suddette tre equazioni otterranno la seguente forma , cioè

$$a^2 = x^2 (u^2 + v^2 - 2muv)$$

$$b^2 = x^2 (1 + u^2 - 2nu)$$

$$c^2 = x^2 (1 + v^2 - 2pv)$$

E dividendo la prima di queste per la seconda , e la seconda per la terza , si avranno tra le nuove incognite u , e v le seguenti equazioni

$$u^2 - \frac{b^2}{a^2 - b^2} v^2 + \frac{2mb^2}{a^2 - b^2} uv - \frac{2na^2}{a^2 - b^2} u + \frac{a^2}{a^2 - b^2} = 0$$

$$u^2 - \frac{b^2}{c^2} v^2 - 2nu + \frac{2pb^2}{c^2} v - \frac{b^2}{c^2} + 1 = 0$$

la di cui ~~equazione~~ ^{*parte*} ne ascenderà al quarto grado.

Bisogna però osservare , che supponendosi $\frac{x}{a} = u$, ed $\frac{y}{a} = v$, queste nuove incognite u , e v per l'omogeneità de' termini si dovranno intendere divise per l'unità assunta ; dimanierachè volendo geometricamente dinotare le u , e v per le DF , e DG , e l'unità per la data retta DE , avremo $AD : DC :: DF : DE$, del pari che sta $z : x :: u : 1$; onde la congiunta FE sarà parallela ad AC : similmente l'altra congiunta EG si mostrerà parallela a CB , e con ciò unita la FG sarà anch'essa parallela

ad AB, e la sezione FEG simile al triangolo ACB. Quindi cotesta supposizione del Signor de la Grange ne fa veder chiaramente, che il problema della piramide riducesi a *tirare pel dato punto E il piano FEG tra' i lati del dato angolo solido D per modo, che la sezione FEG sia simile al dato triangolo ACB*, come sembra di aver eseguito l'Illustre Signor Lhuillier (1); dappoichè ponendo egli le DF, e DG uguali a due incognite, e l'unità DE uguale ad una quantità nota, ne ottenne due equazioni identiche a quelle del Signor de la Grange. Ma queste due equazioni, benchè elegantissime, e degue del principe degli Analisti, pure ne impegnano all'eliminazione, ovvero ad escogitare de'geometrici ripieghi, acciò una delle locali ne fosse un cerchio; per cui affm di ovviare a tutte queste difficoltà alcuni geometri, tra' quali il Cavalier Delambre (2), tengon conto delle distanze dal Zenit, ed altri ancora degli angoli alla base della richiesta piramide. Se non che siffatti angoli *ausiliarij* non li derivano essi, com'è debito, da' dati angoli al vertice della piramide, che sono i dati proprj del problema, ma sibbene per la determinazione loro ne ricorrono alle osservazioni *geodetiche*: la qual cosa non solo ne rende *eccedente* il proposto problema, ma *particolare* benanche la sua soluzione. Pertanto con miglior consiglio par, che siesi condottò il Signor de la Grange, il quale anzichè alterare la natura di un tal problema si rivolse piuttosto a co-

(1) Vedi Flauti. *Geom. di Sito*. Anno 1821, pag. 167.

(2) Vedi *Puissant Geodesia*. Edizione del 1805 pag. 172.

struirlo in pratica mediante la *curva degli errori*. Del resto volendo evitare tai sconci, cercai altrimenti risolvere questo problema della piramide co' puri principii dell' analisi de' Moderni, ed avendone comunicata la soluzione fin dall'anno 1822 al Signor D. Giuseppe Scorza, questi volle indicarla nella sua Geometria analitica, e che ora è di bene il distenderla qui appresso. A tal uopo si chiamino a, b, c i lati AB, AC, BC della data base della richiesta piramide ABCD (*Fig. 22*), m, r i coseni degli angoli ADB, ACB, p, q i seni degli angoli ADC, BDC, n il coseno dell' inclinazione de' due piani ACD, e BCD, e finalmente i due lati AD, DB suppongansi medie proporzionali tra la grandezza nota a , e due incognite x , ed y ; sarà $AD = \sqrt{ax}$, $DB = \sqrt{ay}$, ed a cagion del triangolo ADB, si avrà

$$a^2 = ax + ay - 2ma\sqrt{zy} \dots\dots (A)$$

ed elevando a quadrato, si otterrà la seguente equazione al cerchio (1) riferita a due assi obbliqui; cioè

$$x^2 + (2 - 4m^2) xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0 \dots (B)$$

Inoltre nel triangolo ADC rilevasi essere $b : \sqrt{ax} :: p : \sin ACD = \frac{p\sqrt{ax}}{b}$, e $\cos ACD = \frac{\sqrt{b^2 - p^2ax}}{b}$: si-

milmente nel triangolo CDB sta pure $c : \sqrt{ay} :: q :$

(1) La metà del coefficiente del secondo termine dell'equazione (B) è $1 - 2m^2$, che sarà sempre un fratto vero; dappoichè $2m^2$ è minore del 2 per essere il doppio quadrato del coseno del dato angolo ADB. Il raggio del cerchio, a cui si appartiene la detta equazione (B) è per l'appunto $a \cos ADB$.

(39)

sen BCD = $\frac{q\sqrt{ay}}{c}$, e cos BCD = $\frac{\sqrt{(c^2 - q^2ay)}}{c}$.

Ora per la proprietà dell'angolo solido in C (1), si avrà

$$r = \frac{\sqrt{(b^2 - p^2az)} (c^2 - q^2ay)}{bc} + \frac{npqa}{bc} \sqrt{yz},$$

e con ciò

$$rbc - npqa\sqrt{yz} = \sqrt{(b^2 - p^2az)} (c^2 - q^2ay)$$

ed elevando a quadrato, e sostituendovi nella risultante equazione il valore di $\sqrt{yz}$ ottenuto dall'equazione (A), e fattevi le debite riduzioni, si avrà un'equazione all'iperbole tra gli assintoti; cioè

$$zy - \left(\frac{c^2}{h^2q^2a} - \frac{nrbc}{h^2mpqa} \right) z - \left(\frac{b^2}{h^2p^2a} - \frac{nrbc}{h^2mpqa} \right) y + \frac{k^2b^2c^2}{h^2p^2q^2a^2} - \frac{nrbc}{h^2mpq} = 0 \dots \dots \dots (C)$$

ove h^2 si è sostituito ad $(s - n^2)$, e k^2 ad $(s - r^2)$.

Intanto le incognite z , ed y si determineranno mediante le intersezioni delle locali, a cui appartengono le equazioni (B), (C), e le medie proporzionali tra le dette incognite, e la grandezza a ne daranno i lati AD, e DB della richiesta piramide.

F I N E.

(1) Vedi *Puissant Geodesia*. Edizione del 1819 pag. 65.

ERRORI.

CORREZIONI.

Pag. ver.

2. 27. (FH' : FB)
 7. 8. (NP' : FL')
 8. 21. AC'
 14. 7. FBG
 27. 12. al

(FH' : FB')
 (NP' : FL')
 AE'
 BFG
 la

680596



Fig. III

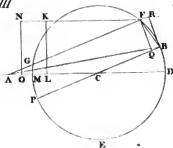


Fig. IV

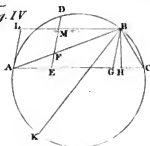


Fig. VIII

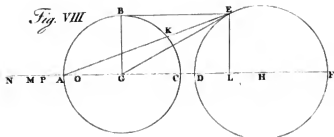


Fig. XI

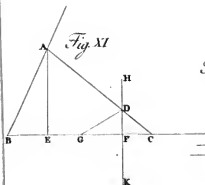
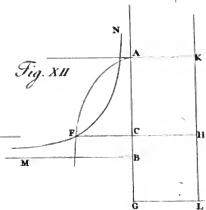
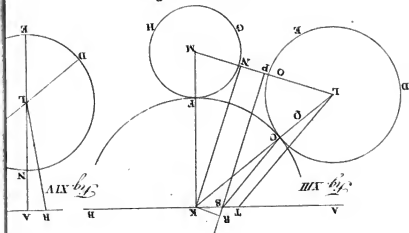
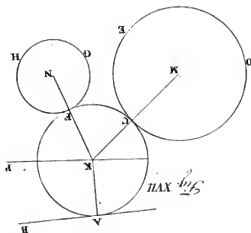
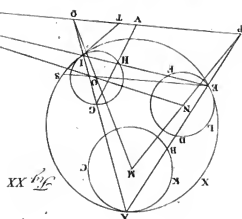


Fig. XII











x



Dr. J. J. G. G. G.

Dr. J. J. G. G. G.